Analiza rizika u višekriterijumskom odlučivanju

Veliki napori u procesu donošenja odluka su uloženi na eliminisanje nepreciznosti u izražavanju vrednosti kriterijuma alternativa, koje nastaju pod uticajem određenih situacija. Metode poput Promethee i AHP su rešavale probleme interne nepreciznosti, gde se nepreciznost ogleda u tome koliko je određena vrednost nekog kriterijuma korisna DO. Međutim, postoje i drugi elementi koji utiču na proces donošenja odluka, a nisu kontrolisani od strane DO. To su rizični događaji, odnosno eksterne nepreciznosti. Sam rizik se definiše kao mogućnost realizacije neželjene posledice nekog događaja i računa se kao proizvod verovatnoće tog događaja i njegovog uticaja (npr. u novčanim jedinicama ili u koristi) na proces donošenja odluka. Rizičan događaj utiče na model tako što vrednosti za određeni kriterijum nose određenu količinu rizika. Stoga, potrebno je uneti i eksterne nepreciznosti (rizik) u model.

Primer:

Menadžer prodaje izdavačke kuće se sprema za sajam knjiga. Potrebno je da izabere štand. Nakon filtriranja štandova po zadatom budžetu (konjunktivna metoda), došao je do konačnog skupa od četiri alternative. Kao kriterijumi određeni su: broj prolaznika, otvorenost, veličina prostora i prihvatljivost buke. Zarad jednostavnosti, svi kriterijumi su tipa maksimizacije. Matrica odlučivanja i ponderi su prikazani ispod.

Alternative	Broj prolaznika	Otvorenost	Veličina prostora	Buka	Očekivana korist
Hala A	28	Zatvoren (6)	55	6	0.6903
Hala B	30	Otvoren (10)	50	8	0.7798
Hala C	55	Zatvoren (6)	40	9	**0.8382**
Hala D	35	Otvoren (10)	36	5	0.7065
Ponderi	0.4	0.2	0.3	0.1	

Rešavanjem otežanim sumama (JAT metodom), dobijaju se vrednosti koje su zapisane u koloni Očekivana korist. Možemo da zaključimo da je hala C najprihvatljivija alternativa.

Međutim, broj polaznika sa sobom nosi određeni rizik. Stoga vrednosti u stvari predstavljaju očekivanu vrednosti broja prolaznika. Kao takva ima i odstupanje. Pretpostavimo da broj polaznika podleže normalnoj raspodeli (N(m,S)). Rizik za ukupnu korist se računa preko formule date ispod i predstavlja standardnu devijaciju očekivane korisnosti:

$$r_{ik} = \sqrt{\frac{\delta_{ik}^2 * w_k^2}{max_k^2}}$$

Gde r_{ik} predstavlja rizik kriterijuma *k* alternative *i*, δ_{ik}^2 varijansu kriterijuma *k* alternative *i*, w_k^2 kvadrat težine (pondera) kriterijuma *k*, a max_k^2 kvadrat maksimalne vrednosti kriterijuma k. Deljenjem maksimalnom vrednošću vrši se **normalizacija** rizika.

Kako nam je poznata tačna raspodela, možemo probabilistički da iskažemo odnos DO prema riziku. *Ukoliko od očekivane koristi oduzmemo rizik, to znači da iskazujemo averziju prema riziku*. U zavisnosti od vrednosti koju oduzimamo, iskazujemo veću ili manju averziju. Tako, ako oduzmemo tačno rizik od očekivane koristi, dobijamo sigurnost od 84% da će broj polaznika biti barem toliko izračunata korist. Analogno, ukoliko od očekivane koristi oduzmemo 1.3 puta rizik dobijamo sigurnost od 90%, 1.7 puta rizik daje sigurnost od 95% i ako oduzmemo 2.4 puta rizik dobijamo sigurnost od 99%. Obrnuto, *ukoliko dodamo na očekivanu korist neku vrednost rizika, tada iskazujemo sklonost ka riziku*. Ako dodamo 0.125 puta rizik, iskazujemo sklonost ka riziku od 5%, tj. DO je spreman da prihvati korist koja je samo 45% sigurna. Odnosno, ukoliko dodamo 0.25 tj. 0.5 puta rizik, iskazujemo sklonost ka riziku od 10% tj. 20%, respektivno. U tabeli koja se nalazi ispod, nalaze se važni stepeni sigurnosti.

Način računanja	Sigurnost
OK	50%
OK – 0.125 * rizik	55%
OK – 0.25 * rizik	60%
OK – 0.5 * rizik	70%
OK – rizik	84%
OK – 1.3 * rizik	90%
OK – 1.7 * rizik	95%
OK – 2.4 * rizik	99%
OK + 0.125 * rizik	45%
OK + 0.25 * rizik	40%
OK + 0.5 * rizik	30%
OK + rizik	16%

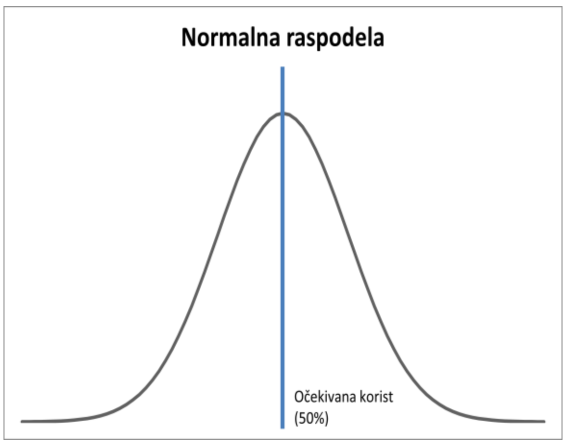
Ukoliko DO iskaže veću averziju prema riziku (zahteva sigurnost od 90% ili 95%), hala B postaje najprihvatljivija alternativa. Razlog tome je što je odstupanje kod hale C najveće. Ukoliko DO iskazuje sklonost ka riziku, onda hala C ostaje najprihvatljivija alternativa.

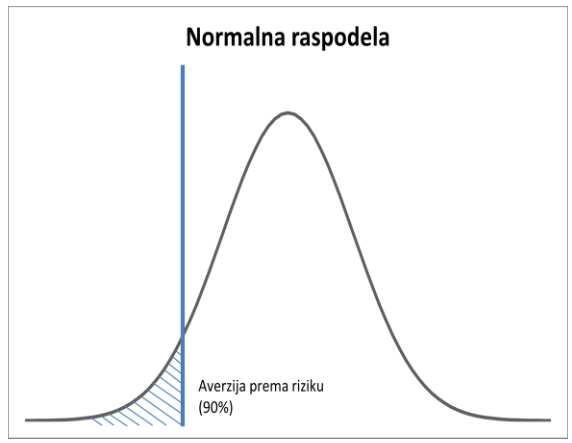
Alternative	Broj prolaznika	Otvorenost	Veličina prostora	Buka	Očekivana korist
Hala A	28 ± 4	6	55	6	0.6903
Hala B	30 ± 2	10	50	8	0.7798

Hala C	55 ± 10	6	40	9	**0.8382**
Hala D	35 ± 5	10	36	5	0.7065
Ponderi	0.4	0.2	0.3	0.1	

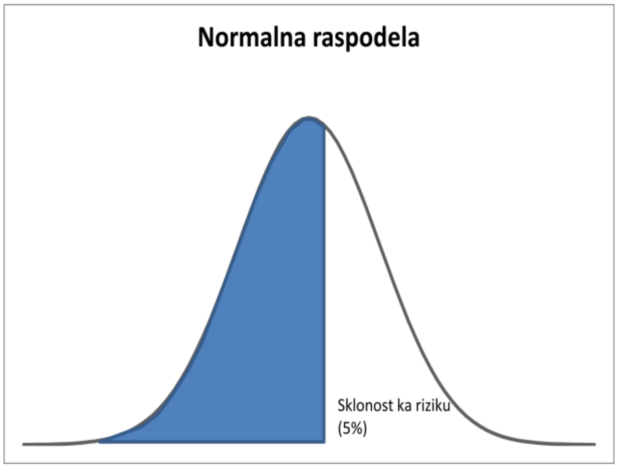
Alt.	Rizik	OK	OK-rizik (84%)	OK-1.3*rizik (90%)	OK-2.4*rizik (99%)	OK+0.125*rizik (45%)
Hala A	0.029	0.6903	0.6612	0.6525	0.6205	0.6939
Hala B	0.015	0.7798	0.7653	**0.7609**	**0.7449**	0.7816
Hala C	0.073	**0.8382**	**0.7655**	0.7436	0.6636	**0.8473**
Hala D	0.036	0.7065	0.6701	0.6592	0.6192	0.7110

Vrednosti koje se oduzimaju ili dodaju na očekivanu korist imaju grafičko objašnjenje koje je prikazano ispod.





Na slici sa leve strane je prikazana očekivana korist. Linija očekivane koristi obuhvata tačno 50% čitave površine raspodele (od linije na desno), tj. postoji 50% verovatnoća da će se dogoditi vrednost ispod očekivane koristi. Sa desne strane prikazana je averzija prema riziku. Linija korisnosti je pomerena nalevo, tj. očekivanje je smanjeno. Iskazivanjem averzije prema riziku smanjuje se verovatnoća da će korist biti manja od očekivane. Konkretno na primeru sa slike, verovatnoća da će korist biti manja od očekivane iznosi 10%. U situaciji kada iskazujemo sklonost ka riziku, očekivanu korist pomeramo na desnu stranu raspodele. Tada postoji veća verovatnoća ostvarivanja rizičnih vrednosti. Konkretno, na slici ispod prikazana je sklonost od 5%, koja nam govori da postoji verovatnoća od 55% da će korist biti manja od očekivane.



U našem primeru za zakup štanda buka takođe predstavlja rizičan kriterijum. Pretpostavimo da je normalne raspodele. Međutim, sada imamo dva kriterijuma koja nose rizik. Računanje ukupnog rizika se računa preko sledeće formule:

$$r_i = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2 * w_k^2}{max_k^2}}$$

Gde je r_i rizik alternative, δ_k^2 varijansa kriterijuma *k*, w_k^2 kvadratna vrednost težine kriterijuma *k*, a max_k^2 kvadrat najveće vrednosti kriterijuma *k*.

Alternative	Broj prolaznika	Otvorenost	Veličina prostora	Buka	Očekivana korist	Rizik
Hala A	28 ± 4	6	55	6 ± 1	0.6903	0.031
Hala B	30 ± 2	10	50	8 ± 0.5	0.7798	0.016
Hala C	55 ± 10	6	40	9 ± 2.5	**0.8382**	0.078
Hala D	35 ± 5	10	36	5 ± 1	0.7065	0.038
Ponderi	0.4	0.2	0.3	0.1		

Zbog toga što se za iskazivanje rizika svih kriterijuma koristila normalna distribucija, konačna distribucija ukupne koristi će takoće biti normalna (reproduktivna osobina), što ne važi za bilo koju distribuciju. Ukoliko postoje različite distribucije kriterijuma onda, u opštem slučaju, ne važi reproduktivna osobina te se raspodela procenjuje Monte Karlo simulacijom (pogledati predavanja). Tumačenje rezultata nakon primene Monte Karlo simulacije je identično kao i u ovom primeru, izuzev granica averzije i sklonosti ka riziku, jer su drugačije površine između distribucije i granice korisnosti.

Takođe, kriterijum otvorenost sa sobom nosi rizik, jer zavisi od vremenskih uslova. Pretpostavimo da otvorenost ima diskretnu raspodelu sa tri stanja, svako sa određenom verovatnoćom. Očekivana korist se dobija kao otežana suma mogućih vrednosti. Ove vrednosti će se kasnije koristiti u matrici odlučivanja. Standardna devijacija za diskretne događaje se računa preko sledeće formule:

$$\delta_i = \sqrt{\sum_{s=1}^{m} w_s * (X_{is} - \bar{X}_i)^2}$$

Gde je δ_i standardna devijacija alternative *i*, w_s verovatnoća stanja *s*, X_{is} korist ili vrednost stanja *s* alternative *i* i $\bar{X}_i$ očekivana vrednost (korist) alternative *i*.

Otvorenost	Sunce (60%)	Oblaci (20%)	Kiša (20%)	OK	Std. dev.
Otvorena	10	5	2	7.4	3.32
Zatvorena	6	5	8	6.2	0.98

Vlasnik izložbenih prostora je najavio da postoji šansa da će se štandovi u hali A i hali D proširiti, te i taj kriterijum sa sobom nosi rizik, pošto nije u potpunosti sigurno da će do tog proširenja doći. Na isti način kao i za otvorenost računamo očekivanu korist i standardnu devijaciju.

Veličina prostora	Proširenje (30%)	Nema promene (70%)	OK	Std. dev.
Hala A	70	55	59.5	6.87
Hala B	50	50	50	0
Hala C	40	40	40	0
Hala D	60	36	43.2	11

Sada možemo sastaviti matricu odlučivanja i matricu rizika.

Alternative	Broj prolaznika	Otvorenost	Veličina prostora	Buka	Očekivana korist
Hala A	28 ± 4	6.2 ± 0.98	59.5 ± 6.87	6 ± 1	0.7379
Hala B	30 ± 2	7.4 ± 3.32	50 ± 0	8 ± 0.5	0.7592
Hala C	55 ± 10	6.2 ± 0.98	40 ± 0	9 ± 2.5	**0.8692**
Hala D	35 ± 5	7.4 ± 3.32	43.2 ± 11	5 ± 1	0.7279
Ponderi	0.4	0.2	0.3	0.1	

Prema otežanim sumama (bez uključivanja rizika), dobijamo očekivanu koristi, i zaključujemo da je hala C najprihvatljivija alternativa. Međutim,u ovom slučaju nije uključen rizik.

Imajući u vidu sklonost i averziju DO prema riziku, možemo računati očekivane koristi alternativa.

	Rizik	Očekivana korist	OK-rizik (84%)	OK-1.3*rizik (90%)	OK-2.4*rizik (99%)	OK+0.125*rizik (5% sklonost)
Hala A	0.054	0.7379	0.6843	0.6682	0.6093	0.7446
Hala B	0.091	0.7592	0.6681	0.6408	0.5406	0.7706
Hala C	0.082	**0.8692**	**0.7870**	**0.7623**	**0.6718**	**0.8795**
Hala D	0.112	0.7279	0.6158	0.5821	0.4588	0.7419

Na osnovu rezultata zaključujemo da je hala C najprihvatljivija alternativa, bez obzira na sklonost ili averziju prema riziku.

U datom primeru sve vrednosti za svaki kriterijum nose sa sobom određeni rizik (izuzev alternative hala B i hala C u kriterijumu veličina prostora). U opštem slučaju, samo vrednosti za određeni/e kriterijum/e nose sa sobom rizik. Tumačenje i rezonovanje ostaje identično.

Analiza odlučivanja

Analiza odlučivanja (AO) predstavlja oblast unutar teorije odlučivanja koja omogućava upravljanje atributima koji podležu određenoj raspodeli, kao i integraciju novih uslova (znanja) koja utiču na raspodelu verovatnoća atributa.

Proces analize odlučivanja se sastoji iz sledećih faza:

1. Strukturiranje problema,
2. Analiza rizika stanja atributa,
3. Analiza korisnosti alternativa,
4. Izbor najprihvatljivije alternative, i
5. Evaluacija rešenja.

U zavisnosti od stepena rizika razlikujemo sledeće vrste AO:

- AO pri izvesnosti,
- AO pri riziku,
    - AO bez uzorkovanja,
        - AO bez *apriori* verovatnoća,
        - AO sa *apriori* verovatnoćama,
    - AO sa uzorkovanjem,
- AO pri neizvesnosti.

AO pri izvesnosti predstavlja poslupak donošenja odluka u kojoj su sve činjenice (vrednosti) za stanja prirode problema poznate. Odnosno, kada za svaku činjenicu postoji samo jedno stanje, ili veći broj stanja, od kojih se sa sigurnošću zna koje stanje će se odigrati. Kao takvo, AO pri izvesnosti predstavlja trivijalan problem koji se svodi na problem izbora najprihvatljivije alternative.

AO pri riziku predstavlja situaciju u kojojsu činjenice za stanja prirode problema poznate, ali postoji veći broj stanja koji se mogu odigrati (i za koje postoje određene verovatnoće). Razlikujemo AO bez uzorkovanja i AO sa uzorkovanjem.

AO bez uzorkovanja delimo na AO bez apriori verovatnoća i AO sa apriori verovatnoćama. U situacijama kada DO nije u mogućnosti da pojedinim stanjima dodeli odgovarajuće verovatnoće, tada govorimo o ***AO bez apriori verovatnoća***.

Primer:

Rasadnik Žare pred novogodišnje praznike želi da obezbedi dovoljnu količinu jelki. Međutim, nisu u stanju da tačno predvide njihovu potražnju. Iz iskustva znaju da je moguće da prodaju između 8 i 12 jelki. Troškovi nabavke jelke iznose 15$, a prodajna cena je 40$. Nakon praznika, svaku preostalu jelku prodaju za 5$.

Na osnovu opisa zadatka formiramo tabelu efikasnosti, odnosno tabelu plaćanja. Ukoliko se nabavi 8 jelki i prodaja bude 8 jelki, imamo sledeću situaciju: 8 (potražnja) x 40$ (prodajna cena) - 8 (ponuda) x 15$ (nabavna cena) = 320$ - 120$ = 200$. Ukoliko potražnja bude iznad 8 jelki, zarada će biti ista jer Žare može da proda samo 8 jelki. U slučaju da je nabavljeno 10 jelki, a potražnja bude 9 jelki, imamo sledeću situaciju: 9 (potražnja) x 40$ - 10 (ponuda) x 15$ + 1 (preostalo) x 5$ = 360$ - 150$ + 5$ = 215$

	S1 (P = 8)	S2 (P = 9)	S3 (P = 10)	S4 (P = 11)	S5 (P = 12)
A1 (N = 8)	200	200	200	200	200
A2 (N = 9)	190	225	225	225	225
A3 (N = 10)	180	215	250	250	250
A4 (N = 11)	170	205	240	275	275
A5 (N = 12)	160	195	230	265	300

U izboru najbolje akcije DO se može poslužiti sledećim metodama: 1) MAXIMIN ili MINIMAX, 2) MAXIMAX, 3) kriterijum maksimalne verodostojnosti i 4) Laplasov kriterijum.

MAXIMIN

Predstavlja kriterijum opreza (pesimizam) koji iz skupa raspoloživih alternativa bira onu koja u najgoroj situaciji daje najveću dobit za DO. Dakle, za svaku alternativu prvo uzimamo najgore vrednosti i od tih vrednosti biramo onu alternativu čija je vrednost plaćanja najveća.

	S1 (P = 8)	S2 (P = 9)	S3 (P = 10)	S4 (P = 11)	S5 (P = 12)	MAXIMIN
A1 (N = 8)	200	200	200	200	200	**200**
A2 (N = 9)	190	225	225	225	225	190
A3 (N = 10)	180	215	250	250	250	180
A4 (N = 11)	170	205	240	275	275	170
A5 (N = 12)	160	195	230	265	300	160

Zaključujemo da je alternativa A1 najprihvatljivija alternativa po MAXIMIN metodi.

MINIMAX

Pored tabele plaćanja, postoji i tabela žaljenja. Žaljenje predstavlja propuštenu priliku, odnosno oportunitetni trošak. Dobija se tako što se po svim stanjima prirode odrede najveća moguća plaćanja. Od tih plaćanja se oduzmu sva ostala plaćanja odgovarajućih stanja. Potom biramo onu alternativu za koju je maksimalno žaljenje minimalno.

	S1 (P = 8)	S2 (P = 9)	S3 (P = 10)	S4 (P = 11)	S5 (P = 12)
A1 (N = 8)	**200**	200	200	200	200
A2 (N = 9)	190	**225**	225	225	225
A3 (N = 10)	180	215	**250**	250	250
A4 (N = 11)	170	205	240	**275**	275
A5 (N = 12)	160	195	230	265	**300**

Prvo određujemo najveća moguća plaćanja za svako stanje (u tabeli iznad obeleženo masnim slovima). Zatim od te vrednosti oduzimamo sve ostale vrednosti odgovarajućih stanja.

	S1 (P = 8)	S2 (P = 9)	S3 (P = 10)	S4 (P = 11)	S5 (P = 12)	MINIMAX
A1 (N = 8)	0	25	50	75	100	100
A2 (N = 9)	10	0	25	50	75	75
A3 (N = 10)	20	10	0	25	50	50
A4 (N = 11)	30	20	10	0	25	**30**
A5 (N = 12)	40	30	20	10	0	40

Kada smo odredili tabelu žaljenja, za svaku alternativu biramo tražimo najveće žaljenje. Od tih najvećih žaljenja biramo ono žaljenje koje je najmanje. U našem primeru, to je alternativa A4 čije je žaljenje 30$.

MAXIMAX

Ovaj metod se naziva i optimistički (ili kriterijum kockanja) i predstavlja situaciju u kojoj se DO sugeriše izbor one alternative kod koje je se, pri najboljem stanju očekuje maksimalna dobit-. DO za svaku raspoloživu alternativu određuje najveće profite (najbolje vrednosti), a potom bira onu alternativu koja obezbeđuje najveći profit.

	S1 (P = 8)	S2 (P = 9)	S3 (P = 10)	S4 (P = 11)	S5 (P = 12)	MAXIMAX
A1 (N = 8)	200	200	200	200	200	200
A2 (N = 9)	190	225	225	225	225	225
A3 (N = 10)	180	215	250	250	250	250
A4 (N = 11)	170	205	240	275	275	275
A5 (N = 12)	160	195	230	265	300	**300**

Prvo smo za svaku alterntaivu odredili najveće plaćanje. Potom smo izabrali kao najprihvatljiviju alternativu odredili onu koja ima najbolju vrednost (najveće plaćanje) od dobijenih najvećih plaćajna. U datom primeru to je alternativa A5.

Kriterijum maksimalne verodostojnosti

Kriterijum maksimalne verodostojnosti podrazumeva da DO dodeljuje redosled odigravanja stanja i bira stanje sa maksimalnom verovatnoćom odigravanja. Nakon određivanja verovatnoća, bira se ona alternativa koja obezbeđuje najveći profit. Za dati primer DO je odredio redosled odigravanja stanja. Odnosno, odredio je da će se najverovatnije odigrati stanje S4.

	S1 (P = 8)	S2 (P = 9)	S3 (P = 10)	S4 (P = 11)	S5 (P = 12)
A1 (N = 8)	200	200	200	200	200
A2 (N = 9)	190	225	225	225	225
A3 (N = 10)	180	215	250	250	250
A4 (N = 11)	170	205	240	**275**	275
A5 (N = 12)	160	195	230	265	300

Kako je na najverovatnije da se dogodi stanje S4, posmatramo to stanje (kolona sa tim stanjem je uokvirena u tabeli iznad). Odatle biramo alternativu koja obezbeđuje naveći profit, odnosno najpovoljnija je alternativa A4.

Laplasov kriterijum

Koristeći ovaj kriterijum uvodi se pretpostavka da DO smatra da se svako stanje može desiti sa podjednakom verovatnoćom. Zbog toga uvodimo težinu stanja koja se dobija preko formule: $V(S_n) = \frac{1}{n}$. Imajući u vidu težine stanja, računamo očekivanu novčanu korist. Kao najprihvatljiviju alternativu biramo onu alternativu čija je očekivana novčana korist najveća.

	S1 (P = 8)	S2 (P = 9)	S3 (P = 10)	S4 (P = 11)	S5 (P = 12)
A1 (N = 8)	200	200	200	200	200
A2 (N = 9)	190	225	225	225	225
A3 (N = 10)	180	215	250	250	250
A4 (N = 11)	170	205	240	275	275
A5 (N = 12)	160	195	230	265	300

Kako imamo pet stanja, dobijamo da je težina stanja $V(S_n) = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

	Laplace
A1 (N = 8)	200 * 0,2 + 200 * 0,2 + 200 * 0,2 + 200 * 0,2 + 200 * 0,2 = 200
A2 (N = 9)	190 * 0,2 + 225 * 0,2 + 225 * 0,2 + 225 * 0,2 + 225 * 0,2 = 218
A3 (N = 10)	180 * 0,2 + 215 * 0,2 + 250 * 0,2 + 250 * 0,2 + 250 * 0,2 = 229
A4 (N = 11)	**170 * 0,2 + 205 * 0,2 + 240 * 0,2 + 275 * 0,2 + 275 * 0,2 = 233**
A5 (N = 12)	160 * 0,2 + 195 * 0,2 + 230 * 0,2 + 265 * 0,2 + 300 * 0,2 = 230

AO sa apriori verovatnoćama je situacija u kojima DO poseduje verovatnoće odigravanja stanja. U tom slučaju DO može da se koristi sledećim metodma:

Kriterijum očekivane novčane vrednosti (ONV)

Za zadate verovatnoće odigravanja stanja, računa se očekivana novčana vrednost (otežana suma). Za najprihvatljiviju alternativu biramo onu alternativu koja ima najveću očekivanu novčanu korist.

Za postojeći primer zadate su verovatnoće odigravanja stanja [0,1; 0,2; 0,3; 0,3; 0,1]

	ONV
A1 (N = 8)	200 * 0,1 + 200 * 0,2 + 200 * 0,3 + 200 * 0,3 + 200 * 0,1 = 200
A2 (N = 9)	190 * 0,1 + 225 * 0,2 + 225 * 0,3 + 225 * 0,3 + 225 * 0,1 = 221,5
A3 (N = 10)	180 * 0,1 + 215 * 0,2 + 250 * 0,3 + 250 * 0,3 + 250 * 0,1 = 236
A4 (N = 11)	**170 * 0,1 + 205 * 0,2 + 240 * 0,3 + 275 * 0,3 + 275 * 0,1 = 240**
A5 (N = 12)	160 * 0,1 + 195 * 0,2 + 230 * 0,3 + 265 * 0,3 + 300 * 0,1 = 233,5

Zaključujemo da je najprihvatljivija alternativa A4.

Kriterijum očekivanog žaljenja (OŽ)

Umesto profita (očekivana novčana vrednost), možemo da posmatramo žaljenje. U tom slučaju želimo da nam žaljenje bude minimalno. Postupak računanja (otežana suma) je identičan kao i za ONV sa razlikom da koristimo tabelu žaljenja.

	S1 (P = 8)	S2 (P = 9)	S3 (P = 10)	S4 (P = 11)	S5 (P = 12)
A1 (N = 8)	0	25	50	75	100
A2 (N = 9)	10	0	25	50	75
A3 (N = 10)	20	10	0	25	50
A4 (N = 11)	30	20	10	0	25
A5 (N = 12)	40	30	20	10	0

Računamo očekivano žaljenje preko otežane sume.

	OŽ
A1 (N = 8)	0 * 0,1 + 25 * 0,2 + 50 * 0,3 + 75 * 0,3 + 100 * 0,1 = 52,5
A2 (N = 9)	10 * 0,1 + 0 * 0,2 + 25 * 0,3 + 50 * 0,3 + 75 * 0,1 = 31
A3 (N = 10)	20 * 0,1 + 10 * 0,2 + 0 * 0,3 + 25 * 0,3 + 50 * 0,1 = 16,5
A4 (N = 11)	**30 * 0,1 + 20 * 0,2 + 10 * 0,3 + 0 * 0,3 + 25 * 0,1 = 12,5**
A5 (N = 12)	40 * 0,1 + 30 * 0,2 + 20 * 0,3 + 10 * 0,3 + 0 * 0,1 = 19

Zaključujemo da je najprihvatljivija alternativa A4, jer ima najmanje očekivano žaljenje.

Očekivana vrednost perfektne informacije (OVPI)

Ukoliko se pretpostavi da DO zna koje će se stanje odigrati, onda je postupak donošenja odluka trivijalan, odnosno, DO će odabrati alternativu sa najvećim profitom za to stanje. Ukoliko zna da će se dogoditi stanje S1, izabraće alternativu A1 (zarada 200). Zatim, za stanje S2, izabraće A2. U slučaju S3, bira A3 (zarada 250), za S4 bira A4 (zarada 275) i za stanje S5 bira A5 (zarada 300). Međutim, stanja se odigravaju sa verovatnoćama [0,1; 0,2; 0,3; 0,3; 0,1] te imamo.

	S1 (P = 8)	S2 (P = 9)	S3 (P = 10)	S4 (P = 11)	S5 (P = 12)
Zarada	200	225	250	275	300

Otežanom sumom dobijamo perfektan slučaj.

	OVPI
	200 * 0,1 + 225 * 0,2 + 250 * 0,3 + 275 * 0,3 + 300 * 0,1 = 252,5

Razlika između perfektnog slučaja i ONV se naziva Očekivana vrednost perfektne informacije. U ovom primeru ONV je 240, te dobijamo da je OVPI = 252,5 – 240 = 12,5 što je zapravo i OŽ najbolje akcije.

Primer:

Data je sledeća tabela odlučivanja.

	Cena *min*	Internet *max*	Udaljenost od grada *min*	Čistoća max
A	55	3	0,7	4
B	65	1	0,4	3
C	40	0	0,7	4
D	25	2	4	3
E	40	1	2	5
Ponderi	0,35	0,2	0,3	0,15

Kriterijum Cena podleže riziku, odnosno moguća su tri stanja – S1 velika tražnja, S2 srednja tražnja i S3 mala tražnja.

	S1	S2	S3
A	60	55	40
B	72	65	50
C	50	40	27
D	30	25	26
E	47	40	30

Potrebno je odrediti najprihvatljiviju alternativu ukoliko:

1. Sva stanja imaju podjednake verovatnoće odigravanja.
2. Se primeni za određene cene MAXIMIN kriteirjum.
3. Stanja imaju verovatnoće 0,2; 0,6; 0,2 respektivno.

Rešenje 1.

Ukoliko sva stanja imaju podjednake verovatnoće odigravanja onda primenjujemo Laplasov kriterijum. Prvo računamo vrednost za kriterijum Cena.

$V(S_n) = \frac{1}{3} = 0{,}333.$

	Cena
A	60 * 0,333 + 55 * 0,333 + 40 * 0,333 = 51,67
B	72 * 0,333 + 65 * 0,333 + 50 * 0,333 = 62,33
C	50 * 0,333 + 40 * 0,333 + 27 * 0,333 = 39
D	30 * 0,333 + 25 * 0,333 + 26 * 0,333 = 27
E	47 * 0,333 + 40 * 0,333 + 30 * 0,333 = 39

Zatim JAT metodom rešavamo ostatak zadatka. Prvo invertujemo podatke i iste normalizujemo L1 normom.

	Laplas
A	**0,242**
B	0,22
C	0,174
D	0,198
E	0,164

Zaključujemo da je najprihvatljivija alternativa A.

Rešenje 2.

Biramo najmanje lošu alternativu. Treba imati u vidu da je tip ekstremizacije minimizacija.

	S1	S2	S3	MAXIMIN
A	60	55	40	60
B	72	65	50	72
C	50	40	27	50
D	30	25	26	30
E	47	40	30	47

Ostatak zadatka rešavamo JAT metodom. Zaključujemo da je alternativa A najbolja.

	MAXIMIN
A	**0,243**
B	0,221
C	0,168
D	0,204
E	0,163

Rešenje 3.

Imajući u vidu težine stanja dobijamo:

	Cena
A	60 * 0,2 + 55 * 0,6 + 40 * 0,2 = 53
B	72 * 0,2 + 65 * 0,6 + 50 * 0,2 = 63,4
C	50 * 0,2 + 40 * 0,6 + 27 * 0,2 = 39,4
D	30 * 0,2 + 25 * 0,6 + 26 * 0,2 = 26,2
E	47 * 0,2 + 40 * 0,6 + 30 * 0,2 = 39,4

Zatim, JAT metodom dobijamo:

	ONV
A	**0,241**
B	0,220
C	0,174
D	0,201
E	0,164

AO sa uzorkovanjem predstavlja mogućnost uključivanja verovanja i informacija uzorkovanja DO, u vidu novih informacija (informacija uzorkovanja). Procedura uključivanja informacija zahteva primenu Bajesove teoreme kako bi se odredile a posteriori verovatnoće.

$$v(s_j|X) = \frac{v(s_j)v(X|s_j)}{\sum_{i=1}^{n} v(s_i)v(X|s_i)}$$

Gde je $v(s_j|X)$ a posteriori verovatnoća, $v(s_j)$ a priori verovatnoća, $v(X|s_j)$ uslovna verovatnoća i $\sum_{i=1}^{n} v(s_i)v(X|s_i)$ ukupna (totalna) verovatnoća događaja X.

Primer: Na prethodni primer (prodaja jelke) dodajemo sledeće. Kada se dešava stanje s_i $(i = 1, \ldots, 5)$ sneg pada (X=1) sa verovatnoćama:

$$v(X|s_1) = 0{,}05$$

$$v(X|s_2) = 0{,}05$$

$$v(X|s_3) = 0{,}05$$

$$v(X|s_4) = 0{,}75$$

$$v(X|s_5) = 0{,}1$$

Dobijamo sledeću tabelu:

Pada sneg	S1 (P = 8)	S2 (P = 9)	S3 (P = 10)	S4 (P = 11)	S5 (P = 12)	
v(S)	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1	
v(X|S)	0,05	0,05	0,05	0,75	0,1	
v(X∩S)	0,005	0,01	0,015	0,225	0,01	0,265
v(S|X)	0,0189	0,0377	0,0566	0,8491	0,0377	

Vrednost v(X∩S) dobijamo kada pomnožimo v(S) i v(X|S). Vrednost v(S|X) dobijamo preko Bajesove formule. Za S1 postupak je sledeći:

$$v(s_1|X) = \frac{v(s_1)v(X|s_1)}{\sum_{i=1}^{n} v(s_i)v(X|s_i)} = \frac{0{,}1 * 0{,}05}{0{,}1 * 0{,}05 + 0{,}2 * 0{,}05 + 0{,}3 * 0{,}05 + 0{,}3 * 0{,}75 + 0{,}1 * 0{,}1} = 0{,}0189$$

Sada možemo umesto v(S) da koristimo v(S|X) i da izračunamo otežanu sumu tabele žaljenja, odnosno očekivano žaljenje. Dobijamo:

	OŽ
A1 (N = 8)	0 * 0,0189 + 25 * 0,0377 + 50 * 0,0566 + 75 * 0,8491 + 100 * 0,0377 = 71,22642
A2 (N = 9)	10 * 0,0189 + 0 * 0,0377 + 25 * 0,0566 + 50 * 0,8491 + 75 * 0,0377 = 46,88679
A3 (N = 10)	20 * 0,0189 + 10 * 0,0377 + 0 * 0,0566 + 25 * 0,8491 + 50 * 0,0377 = 23,86792
A4 (N = 11)	**30 * 0,0189 + 20 * 0,0377 + 10 * 0,0566 + 0 * 0,8491 + 25 * 0,0377 = 2,830189**
A5 (N = 12)	40 * 0,0189 + 30 * 0,0377 + 20 * 0,0566 + 10 * 0,8491 + 0 * 0,0377 = 11,50943

Identičan postupak možemo da ponovimo za situaciju kada ne pada sneg.

Ne pada sneg	S1 (P = 8)	S2 (P = 9)	S3 (P = 10)	S4 (P = 11)	S5 (P = 12)	
v(S)	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1	
v(X=0|S)	0,95	0,95	0,95	0,25	0,9	
v(X∩S)	0,095	0,19	0,285	0,075	0,09	0,735
v(S|X)	0,1293	0,2585	0,3878	0,102	0,1224	

Tada dobijamo sledeće očekivano žaljenje.

	OŽ
A1 (N = 8)	0 * 0,1293 + 25 * 0,2585 + 50 * 0,3878 + 75 * 0,102 + 100 * 0,1224 = 45,748299
A2 (N = 9)	10 * 0,1293 + 0 * 0,2585 + 25 * 0,3878 + 50 * 0,102 + 75 * 0,1224 = 25,272109
A3 (N = 10)	**20 * 0,1293 + 10 * 0,2585 + 0 * 0,3878 + 25 * 0,102 + 50 * 0,1224 = 13,843537**
A4 (N = 11)	30 * 0,1293 + 20 * 0,2585 + 10 * 0,3878 + 0 * 0,102 + 25 * 0,1224 = 15,986395
A5 (N = 12)	40 * 0,1293 + 30 * 0,2585 + 20 * 0,3878 + 10 * 0,102 + 0 * 0,1224 = 21,70068

Kada smo izračunali OŽ za oba stanja, definišemo optimalnu strategiju, odnosno optimalno pravilo odlučivanja.

```
IF (X = 1) THEN A4

IF (X = 0) THEN A3
```

Ako se dogodi događaj X (pada sneg) onda je OŽ 2,83, a ako se ne dogodi, onda je OŽ 13,84. Međutim, verovatnoća da pada sneg (suma v(X∩S) u tabeli „Pada sneg“) iznosi 0,27, a verovatnoća da ne pada sneg iznosi 0,73. Odavde možemo da izračunamo **očekivani rizik (OR)**.

$$OR = \sum OŽ(a_j|X)v(X)$$

Dobijamo da je OR = 2,83 * 0,27 + 13,84 * 0,73 = 10,87.

OR zavisi od broj uzoraka. Naime, OR se smanjuje što je uzorak veći.

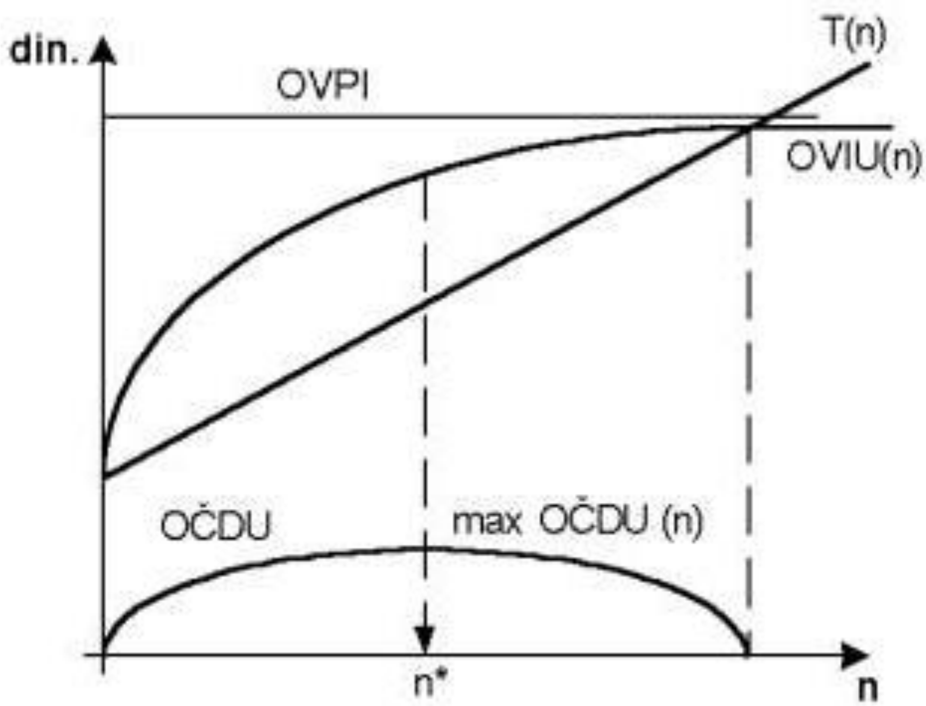
Očekivana vrednost informacije uzorka (OVIU) predstavlja indikator postojanja koristi prilikom sticanja informacije iz uzorkovanja. Dobija se kao razlika između OVPI i OR. Takođe, ova vrednost pokazuje koliko tačno treba platiti troškove uzorkovanja. Kako se uzorak povećava, ova vrednost će se približavati OVPI.

U našem primeru, OVIU = 12,5 – 10,87 = 1,63.

Očekivana čista dobit od uzorkovanja (OČDU) predstavlja rezultat dodatne analize u cilju sagledavanja da li će uzorkovanje obezbediti čistu dobit.

Ako su troškovi uzorkovanja 1$, tada je OĆDU = 1,63 – 1 = 0,63.

Grafički prikaz navedenih koncepata:



Primer:

Data je sledeća tabela odlučivanja.

	Cena *min*	Internet *max*	Udaljenost od grada *min*	Čistoća max
A	55	3	0,7	4
B	65	1	0,4	3
C	40	0	0,7	4
D	25	2	4	3
E	40	1	2	5
Ponderi	0,35	0,2	0,3	0,15

Kriterijum Cena podleže riziku, odnosno moguća su tri stanja – S1 velika tražnja (20%), S2 srednja tražnja (60%) i S3 mala tražnja (20%). Za ta tri stanja moguće su dve situacije: *Mala ponuda* i *Velika ponuda*.

	S1	S2	S3
A	60	55	40
B	72	65	50
C	50	40	27
D	30	25	26
E	47	40	30

Pri stanju S_i (i = 1..3) *Mala ponuda* (X) se dešava sa verovatnoćama:

- P(X|S1 – velika tražnja) = 0,70
- P(X|S2 – srednja tražnja) = 0,50
- P(X|S3 – velika tražnja) = 0,10
- Stanja imaju verovatnoće 0,2; 0,6; 0,2 respektivno.

Potrebno je odrediti kako događaj *Male* ili *Velike ponude* utiče na rang alternativa.

	S1	S2	S3	
v(S)	0,2	0,6	0,2	
$v(X\|S_i)$	0,7	0,5	0,1	
$v(X \cap S)$	0,14	0,3	0,02	0,46
$v(S_i\|X)$	**0,3**	**0,65**	**0,04**	
$v(\neg X\|S_i)$	0,3	0,5	0,9	
$v(\neg X \cap S)$	0,06	0,3	0,18	0,54
$v(S_i\|\neg X)$	**0,11**	**0,56**	**0,33**	

U zavisnosti od vrste ponude (Mala, Velika) cena će se formirati na drugačiji način. Vrednosti kriterijuma cena će biti:

	Mala ponuda	Velika ponuda
A	55.87	50.56
B	66.48	60.78
C	42.48	36.78
D	26.57	25.89
E	41.70	37.44

Dalje se zadatak rešava već poznatim postupkom.