



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

# Теорија одлучивања

Аналитички хијерархијски процес

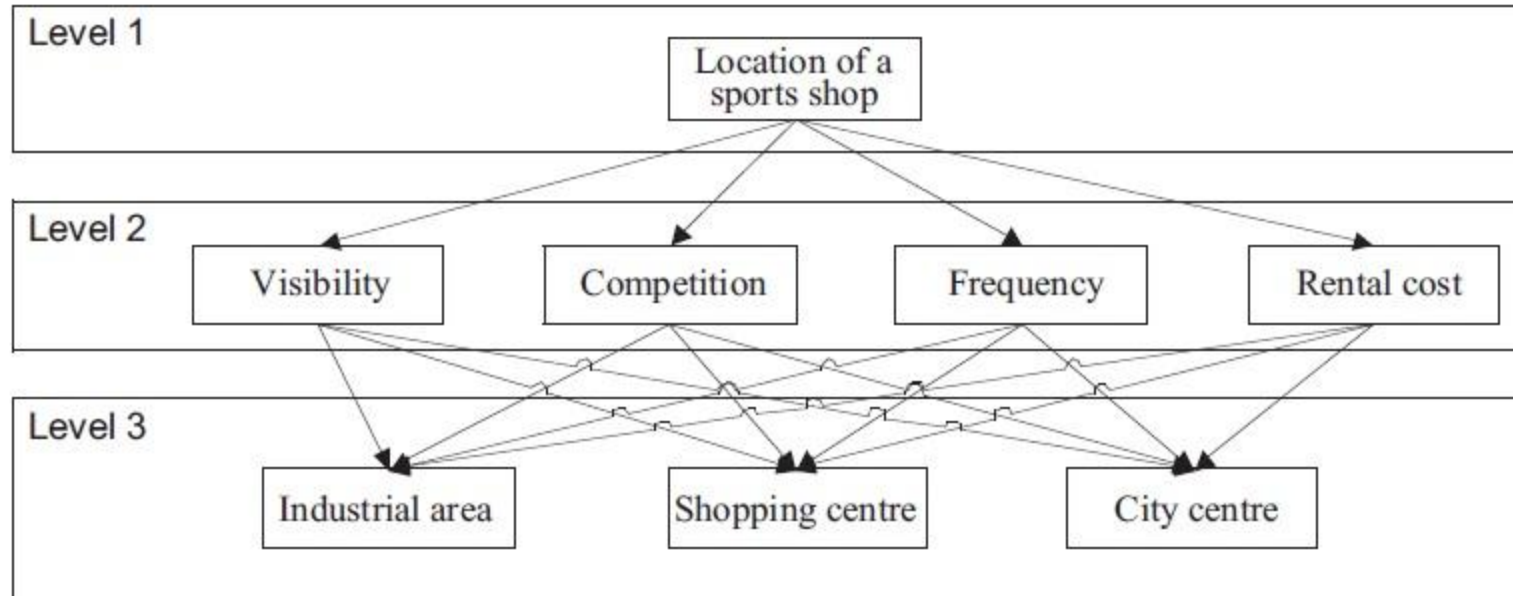
# Циљ предавања

- Упознавање са АХП методом
- Врсте АХП методе
- Предности и недостаци АХП методе

# Софтвери АХП

- Expert Choice
- MakeItRational (.com)

# Пример АХП проблема



*Figure 2.2 Traditional representation of the hierarchy.*

# Сатијева скала 9 тачака

- Поређење објеката у паровима
  - 1: једнака преференција
  - 2: слаба преференција
  - 3: умерена преференција
  - 4: умерена ка јакој преференција
  - 5: јака преференција
  - 6: јака ка врло јакој преференцији
  - 7: врло јака преференција
  - 8: врло, врло јака преференција
  - 9: екстремна преференција

# Сатијева скала девет тачака

- ДО поређењем у паровима дефинише тежине, као и нормализоване вредности за све критеријуме.
- За поређење објеката ДО је дата скала од девет тачака.

А	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Б
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

А	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	Б
---	---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	---

# Пример анкетирања испитаника

Row	Factor I	Evaluation																Factor II	
1	Man	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Material
2	Man	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Environment
3	Man	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Machine
4	Man	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Method
5	Material	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Environment
6	Material	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Machine
7	Material	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Method
8	Environment	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Machine
9	Environment	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Method
10	Machine	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Method

# Модалитети методе

- Апроксимативни приступ (ради се на вежбама)
- Приступ преко сопствених вредности (оригинални приступ)
- Групна методологија



# Општи кораци методе АХП

1. Међусобно поређење критеријума,
2. Међусобно поређење алтернатива по сваком критеријуму и
3. Агрегирање корисности алтернатива.
4. Анализа осетљивости.

# Особине АХП

- Правило транзитивности
  - $a_{ij} = a_{ik} * a_{kj}$
- Правило реципроцитета
  - $a_{ij} = 1/a_{ji}$

# Задатак 1

- Проверити да ли је матрица процене потпуно конзистентна?

	K1	K2	K3
K1		(2)	2
K2			3
K3			

# Решење

Пошто су дијагонални елементи увек конзистентни, почињемо од проверања процене  $a_{12}$

$$a_{12} = a_{11} * a_{12} = 1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_{12} = a_{12} * a_{22} = \frac{1}{2} * 1 = \frac{1}{2}$$

$$a_{12} = a_{13} * a_{32} = 2 * \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2}$$

Можемо да закључимо да матрица није конзистентна

# Апроксимативни приступ (рађено на вежбама)

1. Након попуњавања матрице процене рачунају се суме за сваку колону
2. Свака колона се дели са одговарајућом сумом
3. За сваки ред се одређује просечна вредност, која представља приоритет (тежину) одређеног критеријума/алтернативе

# Задатак 2. Апроксимативни АХП

- Дата је матрица процене за тежине

	K1	K2	K3
K1		(2)	2
K2			3
K3			

- Као и матрице процене за критеријуме K1, K2 и K3, респективно

K1	A1	A2	A3
A1		1	2
A2			2
A3			

K2	A1	A2	A3
A1		(2)	2
A2			4
A3			

K3	A1	A2	A3
A1		1	(2)
A2			(2)
A3			

- Одредити поредак алтернатива АХП методом

# 1. Међусобно поређење критеријума = > тежине

	K1	K2	K3
K1		(2)	2
K2			3
K3			



	K1	K2	K3
K1	1	0.5	2
K2	2	1	3
K3	0.5	0.33	1



	K1	K2	K3
K1	1	0.5	2
K2	2	1	3
K3	0.5	0.33	1
L1	3.5	1.83	6

	K1	K2	K3
K1	0.286	0.273	0.333
K2	0.571	0.545	0.5
K3	0.143	0.182	0.167



	Ар. средина
K1	0.297
K2	0.539
K3	0.164

## 2. Међусобно поређење алтернатива по сваком критеријуму => **норм. критер.**

K1	A1	A2	A3
A1		1	2
A2			2
A3			



	Ар. средина
A1	0.400
A2	0.400
A3	0.200

K2	A1	A2	A3
A1		(2)	2
A2			4
A3			



	Ар. средина
A1	0.286
A2	0.571
A3	0.143

K3	A1	A2	A3
A1		1	(2)
A2			(2)
A3			



	Ар. средина
A1	0.250
A2	0.250
A3	0.500

	K1(мин)	K2(макс)	K3(мин)
A1	12	45	65
A2	15	79	63
A3	23	28	35



### 3. Рачунање корисности алтернатива

	K1	K2	K3
Тежине	0.297	0.539	0.164

	K1
A1	0.400
A2	0.400
A3	0.200

	K2
A1	0.286
A2	0.571
A3	0.143

	K3
A1	0.250
A2	0.250
A3	0.500



Корисност
0.314
0.468
0.218

# АХП преко сопствених вредности

Вектор тежина се добија решавањем следеће једначине:

$$A^*p = \lambda^*p$$

$A$  – матрица процене

$p$  – вектор приоритета (тежине)

$\lambda$  – вектор сопствених вредности матрице

Ако је  $\lambda_{\max} = n$  (димензија матрице процене),  
нема неконзистентности у проценама.  $(\lambda_{\max} - n)$   
је мера неконзистентности

# Кораци методе сопств. вредности

1. Векторски помножити матрицу процена са самом собом  $A_{n+1} = A_n * A_n$
2. Сабрати вредности колона и урадити нормализацију
3. Израчунати просек реда (прва апроксимација приоритета)
4. Поновљати кораке 1 и 2 до конвергенције приоритета

# Задатак 2

Методом сопствених вредности одредити прву и другу апроксимацију приоритета матрице процене

	K1	K2	K3
K1		(2)	2
K2			3
K3			

# Решење

Приоритет прве апроксимације се добија релативно једноставно.

[0.2975, 0.5390, 0.1638]

Да би се добила друга апроксимација потребно је векторски помножити матрицу процене са самом собом. Добија се следећи резултат

[0.2970, 0.5396, 0.1634]

	K1	K2	K3
K1	3	1,667	5.5
K2	5.5	3	10
K3	1,667	0,9167	3

## Задатак 3:

### Рачунање конзистентности оцена

	A	Б	В	Тежине
A	1	4	1/3	0,265
Б	1/4	1	1/7	0,08
В	3	7	1	0,656

# Рачунање рациа неконзистентности

1. Помножити сваку колону матрице процене са припадајућом тежином и сабрати добијене векторе.
2. Поделити добијени вектор са вектором тежина.
3. Изабрати највећу сопств. вредност ( $\lambda_{\max}$ ) вектора из корака 2.
4. Израчунати индекс конзистентности (CI)
5. Израчунати рацио неконзистентности (CR)

# Корак 1

	A	Б	В	Тежине
A	1	4	1/3	0,265
Б	1/4	1	1/7	0,08
В	3	7	1	0,656

$$.265 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/4 \\ 3 \end{pmatrix} + .08 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + .656 \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/7 \\ 1 \end{pmatrix} =$$



# Корак 2

$$\begin{array}{|c|} \hline 0.801901 \\ \hline 0.239496 \\ \hline 2.007485 \\ \hline \end{array} / \begin{array}{|c|} \hline 0.264811 \\ \hline 0.079644 \\ \hline 0.655545 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 3.028198 \\ \hline 3.007091 \\ \hline 3.062314 \\ \hline \end{array}$$

# Корак 3

3.028198
3.007091
3.062314

$\lambda_{\max}$       3.062314

# Корак 4: Индекс конзистентности

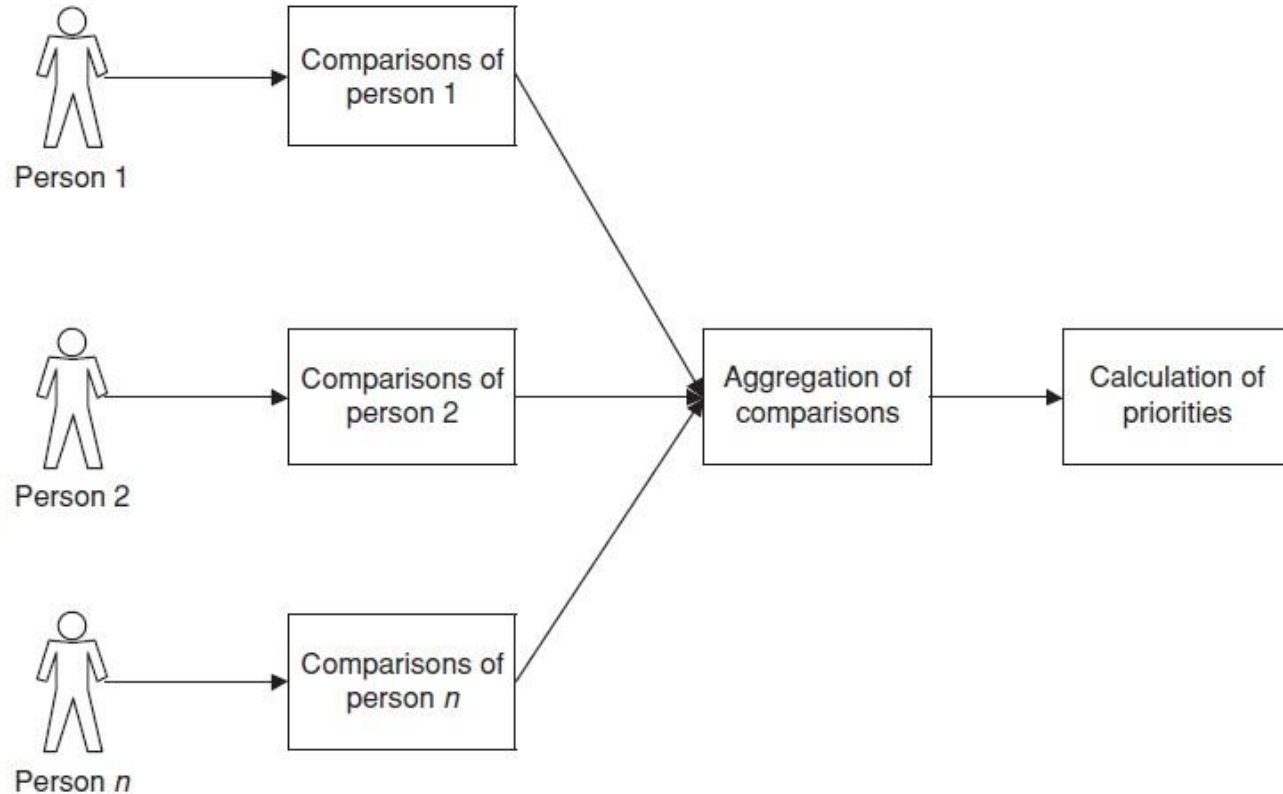
$$CI = (\lambda_{\max} - n) / (n-1) = (3.062 - 3) / 2 = 0.031$$

# Корак 5: Рацио неконзистентности

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0	0	0.58	0.9	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49

$$CR = CI / RI = 0.031/0.58 = 0.053 < 0.1$$

# Групни АХП



*Figure 2.19 Aggregation at the comparison level.*

# Агрегација процена чланова група

- Користи се геометријска средина

# Задатак 4:

Агрегирати процене 3 ДО

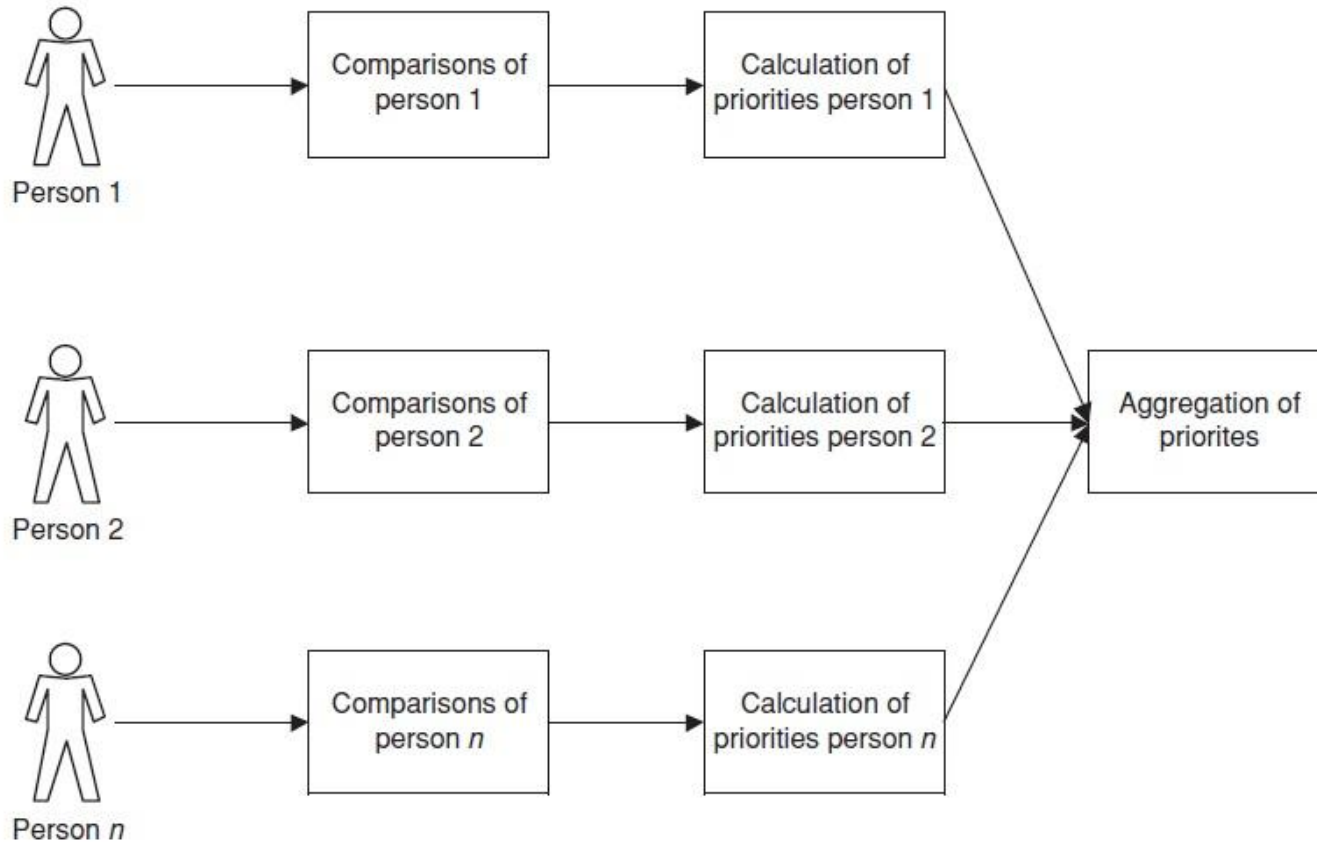
1	2	3
0.5	1	4
0.333333	0.25	1

1	3	5
0.333333	1	2
0.2	0.5	1

1	4	3
0.25	1	2
0.333333	0.5	1

1	2.884499	3.556893
0.346681	1	2.519842
0.281144	0.39685	1

# Групни АХП



*Figure 2.20 Aggregation at the priorities level.*



# Агрегација приоритета чланова група

- Користи се аритметичка средина
- Могуће је сваком ДО доделити тежину

# Задатак 5

Агрегирати три процене приоритета ДО, при чему ДО1 и ДО2 имају тежину 0.3, а ДО3 тежину 0.4.

ДО1: 0,512; 0,36; 0,128

ДО2: 0,625; 0,222; 0,111

ДО3: 0,62; 0,224; 0,156

# Решење

Множењем тежина ДО са одговарајућом тежином тог ДО добија се коначно решење за приоритет

0,596

0,267

0,137

# Следећи пут

- Метода PROMETHEE